Pontificia Universidad Católica deValparaíso
Instituto de Matemáticas
ALGEBRA LINEAL 2^a Prueba
MAT- 213

I parte (30 **puntos**)

En la siguiente tabla usted deberá registrar el valor de verdad de cada una de las siguientes proposiciones. Justificando las que resultan ser verdaderas.

1	2	3	4	5	6
V	F	F	F	V	V

1.1 $(1,-2,3) \in \langle (2,2,3),(2,10,-1) \rangle$

Verdadero pues,

$$(1,-2,3) = \frac{7}{8}(2,2,3) + -\frac{3}{8}(2,10,-1)$$

1.2 $W = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / \quad sen(x) = 0\right\} \leq \mathbb{R}^2$

Falso pues,

$$(\pi,0) \in W \wedge \frac{3}{2}(\pi,0) \notin W$$

1.3 $U = \langle (1,-2,3),(2,2,3),(2,10,-1) \rangle = \mathbb{R}^3$

Falso pues,

$$\{(1,-2,3),(2,2,3),(2,10,-1)\} \text{ es l.d.}$$

1.4 $S = \{A \in M_2(\mathbb{R}) \quad / \quad A - A^t = 0\} \leq M_2(\mathbb{R}) \Longrightarrow \dim S = 2$

Falso pues,$\dim(S) = 3$ dado que $S = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in S \ / \ b = c \right\} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\rangle$

1.5 Si V es un $\mathbb{R}-$ espacio vectorial de dimensión 2 y $B = \{u,v\} \subset V$ es linealmente independiente entonces $W = \langle 2u,\ u-v \rangle = V$.

Verdadero pues, $B\prime = \{2u, u-v\}$ es L.I de V dado que $\alpha(2u) + \beta(u-v) = (2\alpha+\beta)u - \beta v = 0_V$

y como B es l.i. se tiene $\alpha = \beta = 0$,luego dado que $\dim(V) = 2$,

$$W = \langle 2u,\ u-v \rangle = V$$

1.6 Si $B = \{(4,6), (1,-2)\}$ $\left(\text{base del espacio vectorial } \mathbb{R}^2\right)$ y $[id]_B^{\widetilde{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$ $\left(\text{matriz de paso de la base } B \text{ a la base } \widetilde{B}\right)$entonces $\widetilde{B} = \{(11,20), (7,14)\}$

Verdadero pues,$[id]_B^{\widetilde{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$, entonces $[id]_{\widetilde{B}}^{B} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$

por lo tanto $\widetilde{B} = \{u, v\}$

$$u = 3(4,6) - 1(1,-2) = (11,20)$$

$$v = 2(4,6) - 1(1,-2) = (7,14)$$

II parte 2^a Parte(30 **puntos**)

Sea $U = \left\langle x^2 - 4x + 5,\ 11x^2 - 44x + 43,\ \ - 2x^2 + 8x - 7 \right\rangle \leq \mathbb{R}_2\left[x\right]$

2.1 Muestre que $B = \left\{x^2 - 4x + 5, -2x^2 + 8x - 7\right\}$ es base de U.

Desarrollo

Observar que

- $11x^2 - 44x + 43 = \ \ 3\left(x^2 - 4x + 5\right) + -4\ \left(-2x^2 + 8x - 7\right)$
- $\left\{x^2 - 4x + 5, -2x^2 + 8x - 7\right\}$ es l.i

Por lo tanto B es base de U

2.2 Determine $p(x) \in U$ sabiendo que $\left[p(x)\right]_B = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

Desarrollo

$p(x) = -2\left(x^2 - 4x + 5\right) + 1\left(-2x^2 + 8x - 7\right) = -4x^2 + 16x - 17$

2.3 Calcule $\left[\ 22x^2 - 88x + 86\right]_B$

Desarrollo

$$22x^2 - 88x + 86 = 6\left(x^2 - 4x + 5\right) + -8\left(-2x^2 + 8x - 7\right)$$

$$\left[\ 22x^2 - 88x + 86\right]_B = \begin{pmatrix} 6 \\ -8 \end{pmatrix}$$

2.4 Considere $W = \left\{ax^2 + bx + c\ \in \mathbb{R}_2\left[x\right]\ /\ a + b + c = 0\right\}$

Muestre que $\mathbb{R}_2\left[x\right] = U + W$

Desarrollo

$$\begin{aligned} W &= \left\{ax^2 + bx + c\ \in \mathbb{R}_2\left[x\right]\ /\ a + b + c = 0\right\} \\ W &= \left\langle -x^2 + 1, -x + 1\right\rangle \end{aligned}$$

Por lo tanto $U + W = \left\langle x^2 - 4x + 5, -2x^2 + 8x - 7, -x^2 + 1, -x + 1\right\rangle$,

Como $x^2 - 4x + 5 = -2\left(-2x^2 + 8x - 7\right) + 3\left(-x^2 + 1\right) + -12\left(-x + 1\right)$

y $\left\{-2x^2 + 8x - 7, -x^2 + 1, -x + 1\right\}$ es l.i

Por tanto $\left\{-2x^2 + 8x - 7, -x^2 + 1, -x + 1\right\}$es base de $\mathbb{R}_2\left[x\right]$,así $\mathbb{R}_2\left[x\right] = U + W$

2.5 ¿Es $\mathbb{R}_2\left[x\right] = U \oplus W$? Justifique

Respuesta No, ya que $dim U \cap W = 1 \neq 0$

Coordinadora: Patricia Vásquez S.
Octubre 4, 2005